

Если по твердому телу, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, произвести удар, приложив ударный импульс $\bar{S}$, то при выполнении некоторых условий не возникнет ударных реакций в подшипниках оси вращения. Получим эти условия.

Пусть твердое тело с неподвижной осью AB , по которой направлена координатная ось Oz , имеет до удара угловую скорость ω_0 (рис. 162). К телу приложен ударный импульс $\bar{S}$; угловая скорость изменяется и становится равной ω . Освободив тело от связей и заменив их импульсами реакций $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_B$, применим к явлению удара теоремы об изменении количества движения и кинетического момента. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q} - \bar{Q}_0 &= \sum_k \bar{S}_k^{(e)} = \bar{S} + \bar{S}_A + \bar{S}_B; \\ \bar{K} - \bar{K}_0 &= \sum_k \bar{M}_0(\bar{S}_k^{(e)}) = \bar{M}_0(\bar{S}) + \bar{M}_0(\bar{S}_A) + \bar{M}_0(\bar{S}_B), \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где $\bar{Q}$ и $\bar{K}_0$ — количество движения и кинетический момент после удара, а $\bar{Q}_0$ и $\bar{K}_0$ — соответственно те же величины перед ударом.

Скорости точек при вращении тела вычисляем по формуле Эйлера:

$$\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k.$$

Следовательно, количество движения

$$\bar{Q} = M \bar{v}_C = M(\bar{\omega} \times \bar{r}_C),$$

где M — масса тела; $\bar{r}_C$ — радиус-вектор центра масс. Так как $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_0$ направлены по оси вращения, то

$$\bar{Q} = \bar{Q}_0 = M \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega - \omega_0 \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = \{ \bar{i}[-y_C(\omega - \omega_0)] + \bar{j}[x_C(\omega - \omega_0)] + \bar{k} \cdot 0 \} M. \quad (32)$$

Проекции кинетического момента на оси координат можно определить по формулам для тела, имеющего одну закрепленную точку, но при условии, что $\omega_x = \omega_y = 0$ и $\omega_z = \omega$. Имеем:

$$\begin{aligned} K_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z = -J_{xz} \omega; \\ K_y &= -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z = -J_{yz} \omega; \\ K_z &= -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z = J_z \omega. \end{aligned}$$

543

Используя эти формулы, получим:

$$\begin{aligned} K_x - K_{0x} &= -J_{xz}(\omega - \omega_0); \\ K_y - K_{0y} &= -J_{yz}(\omega - \omega_0); \\ K_z - K_{0z} &= J_z(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (33)$$

Проецируя (31) на оси координат и учитывая (32) и (33), получаем

$$\left. \begin{aligned} -My_C(\omega - \omega_0) &= S_x + S_{Ax} + S_{Bx}; \\ Mx_C(\omega - \omega_0) &= S_y + S_{Ay} + S_{By}; \\ 0 &= S_z + S_{Az}; \\ -J_{xz}(\omega - \omega_0) &= M_x(\bar{S}) + M_x(\bar{S}_A) + M_x(\bar{S}_B); \\ -J_{yz}(\omega - \omega_0) &= M_y(\bar{S}) + M_y(\bar{S}_A) + M_y(\bar{S}_B); \\ J_z(\omega - \omega_0) &= M_z(\bar{S}) + M_z(\bar{S}_A) + M_z(\bar{S}_B). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Из системы уравнений (34) определяем импульсы реакций $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_B$ и изменение угловой скорости при ударе $\omega - \omega_0$ для заданного тела и внешнего ударного импульса $\bar{S}$.

Определим условия, при которых удар по телу не вызывает ударных реакций в подшипниках, т. е. когда $S_A = S_B = 0$. Из системы уравнений (34) в этом случае получаем:

$$\left. \begin{aligned} -My_C(\omega - \omega_0) &= S_x; \\ Mx_C(\omega - \omega_0) &= S_y; \\ 0 &= S_z; \\ -J_{xz}(\omega - \omega_0) &= M_x(\bar{S}); \\ -J_{yz}(\omega - \omega_0) &= M_y(\bar{S}); \\ J_z(\omega - \omega_0) &= M_z(\bar{S}). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Из соотношений (35) следует: так как $S_z = 0$, то ударный импульс $\bar{S}$ находится в плоскости, параллельной Oxy . Выберем начало координат O на оси вращения так, чтобы импульс $\bar{S}$ лежал в плоскости Oxy , а координатную ось Ox направим параллельно $\bar{S}$. Тогда ударный импульс $\bar{S}$ пересечет ось Oy в точке K . При таком выборе начала координат и осей $S_y = 0$, $S_x = S$, $M_x(\bar{S}) = 0$, $M_y(\bar{S}) = 0$, так как $\bar{S}$ параллелен Ox и пересекает Oy .

Учитывая это, из условий (35) получаем из второго уравнения $x_C = 0$, из четвертого $J_{xz} = 0$, из пятого $J_{yz} = 0$, т. е.

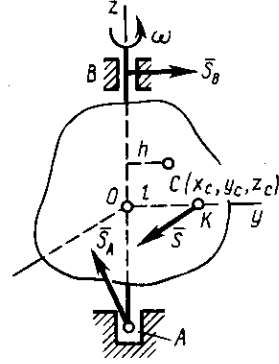


Рис. 162

544
центр масс находится в плоскости Oyz и ось вращения Oz является главной осью инерции для точки O . Так как ударный импульс $\bar{S}$ параллелен оси Ox , то, следовательно, он перпендикулярен плоскости Oyz , проходящей через ось вращения и центр масс.

Если ввести длину $l = OK$, то $M_z(\bar{S}) = -lS$ при направлении $\bar{S}$ в положительную сторону оси Ox . С учетом этого, исключая S из первого и шестого уравнений (35), получаем

$$l = OK = J_z / My_C. \quad (36)$$

При сделанном выборе осей координат y_C — расстояние от оси вращения Oz до центра масс. Если его обозначить h , то $l = J_z / (Mh)$.

Получена формула, по которой вычисляется приведенная длина физического маятника.

Точка пересечения K линии действия ударного импульса с плоскостью, проходящей через ось вращения и центр масс при отсутствии ударных реакций в подшипниках, называется **центром удара**. Любой по числовой величине ударный импульс $\bar{S}$, линия действия которого проходит через точку K перпендикулярно плоскости, содержащей ось вращения и центр масс, не вызывает ударных реакций в подшипниках; если ось вращения является главной осью инерции для точки O — точки пересечения оси вращения с перпендикулярной плоскостью, содержащей ударный импульс $\bar{S}$; если расстояние от оси вращения до линии действия ударного импульса l равно приведенной длине физического маятника; если центр удара K и центр масс C лежит по одну сторону от оси вращения.

Если центр масс находится на оси вращения, то $h = y_C = 0$ и расстояние l от оси вращения до центра удара K равно бесконечности. В этом случае центра удара не существует.

Так как для центра масс, находящегося на оси вращения, $\bar{u}_C = \bar{v}_C = 0$, то $\bar{Q} - \bar{Q}_0 = M(\bar{u}_C - \bar{v}_C) = 0$ и из первого уравнения (31) получаем

$$0 = \bar{S} + \bar{S}_A + \bar{S}_B,$$

откуда

$$\bar{S}_A + \bar{S}_B = -\bar{S},$$

т. е. ударный импульс, приложенный к телу, целиком передается на подшипники.

Пример. Дверь, имеющая форму прямоугольной пластины (рис. 163), закреплена в точке A с помощью подпятника, а в точке B — подшипника. Ширина двери h . Определить положение центра удара двери, если она открывается приложением ударного импульса.

Решение. Ударный импульс $\bar{S}$ должен быть перпендикулярен плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс двери, т. е. плоской самой

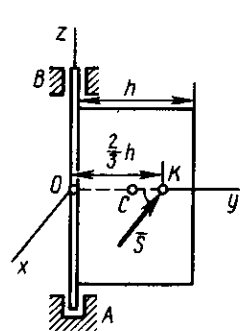


Рис. 163

18 Заказ 192
545
двери. Плоскость, перпендикулярная оси вращения, в которой расположен ударный импульс, должна дать точку пересечения O на оси вращения, для которой эта ось является главной осью инерции. Таким свойством обладает точка, расположенная на оси Oz , в которой пересекаются плоскость двери с плоскостью ее симметрии для однородной двери.

Расстояние $OK = l$ до центра удара K определяем по формуле для приведенной длины физического маятника

$$l = \frac{J_z}{My_C}.$$

В рассматриваемом случае

$$y_C = h/2; \quad J_z = Mh^2/3.$$

Следовательно,

$$l = \frac{Mh^2/3}{Mh/2} = \frac{2}{3}h.$$

Любой по числовой величине ударный импульс, линия действия которого перпендикулярна плоскости двери и проходит через центр удара K на расстоянии от оси $l = \frac{2}{3}h$, не передается на подпятник A и подшипник B .